

Bologna 20 Gennaio 2000

WAVELETS:
UN NUOVO STRUMENTO PER L'ANALISI
DI SEGNALI E IMMAGINI

Ignazio D'Antone

INFN

Seminario di Sezione

WAVELETS

- Nate nei primi anni '80, le wavelets furono inizialmente utilizzate nella rappresentazione di segnali sismici.
- Nella seconda metà degli anni '80 la teoria matematica è stata rigorosamente formalizzata.
- Il decennio scorso si è avuto un interesse sempre crescente verso questo strumento che rappresenta la sintesi di teorie e concetti sviluppatasi in campi diversi.
- Sono uno strumento matematico semplice per l'analisi di segnali, suoni e immagini, analisi numerica e geometria frattale.

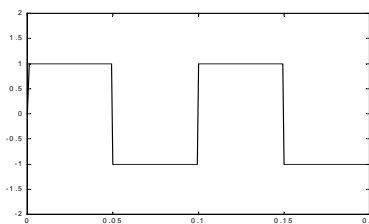
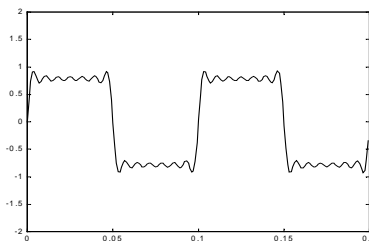
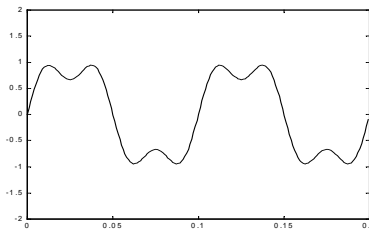
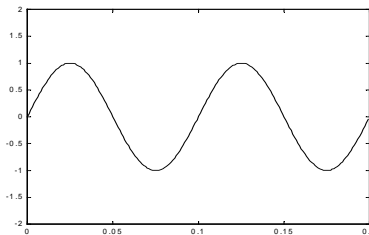
TRASFORMATA DI FOURIER

- Scopo : rappresentare un segnale con un insieme di funzioni (base) le cui proprietà siano ben note.
- Joseph Fourier sceglie $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j \sin\omega t$.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

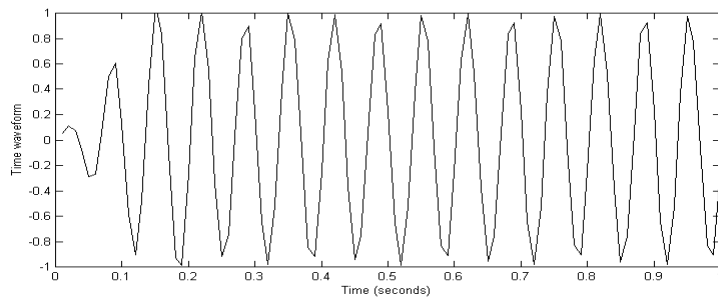
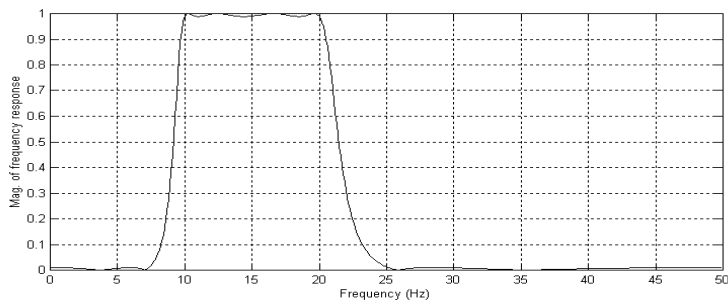
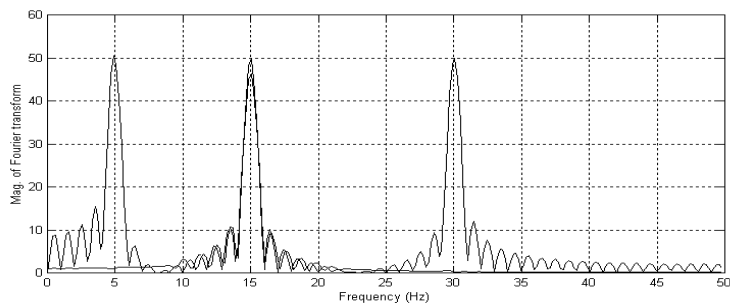
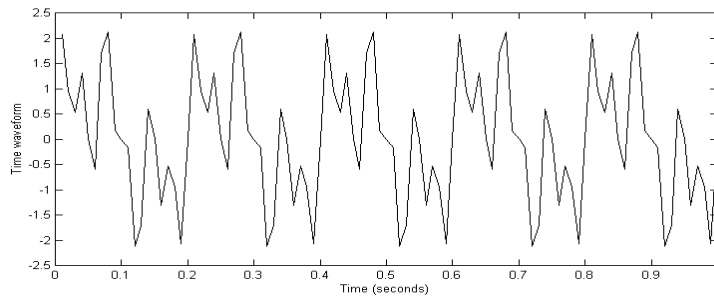
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

- Esempio:



TRASFORMATA DI FOURIER

- Usata con successo nell'elaborazione di segnali.



TRASFORMATA DI FOURIER

- Usata con successo nell'elaborazione di immagini.

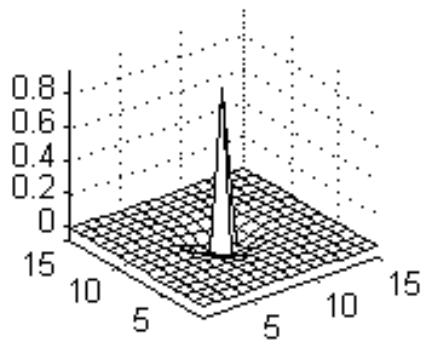
Original Flower Image



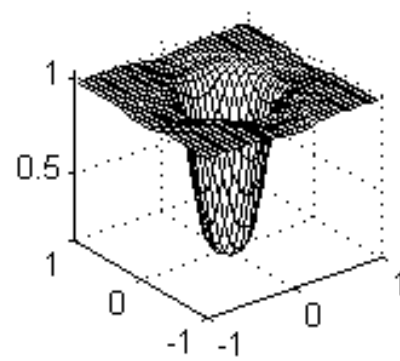
Filtered Image



Filter Coefficients

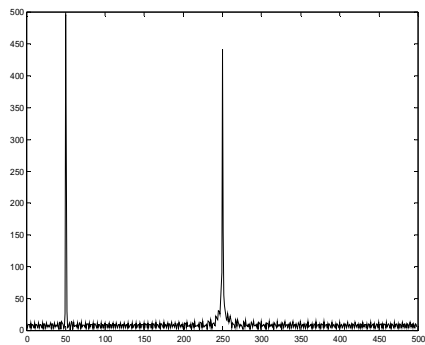
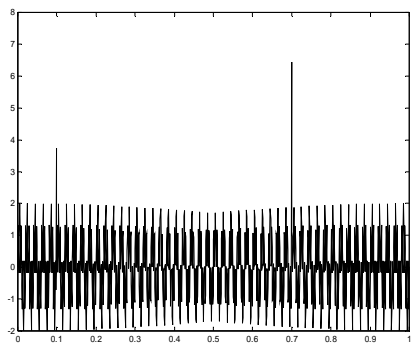
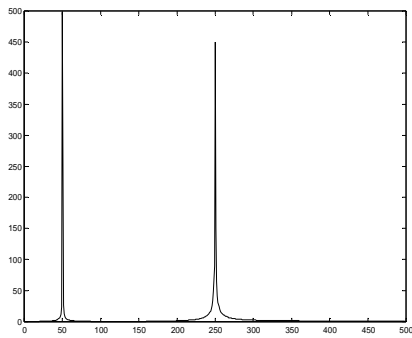
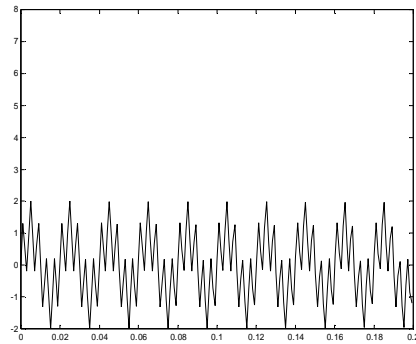
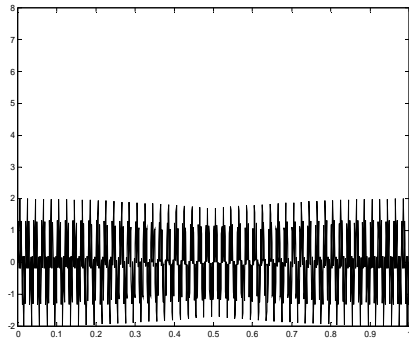


Frequency Response



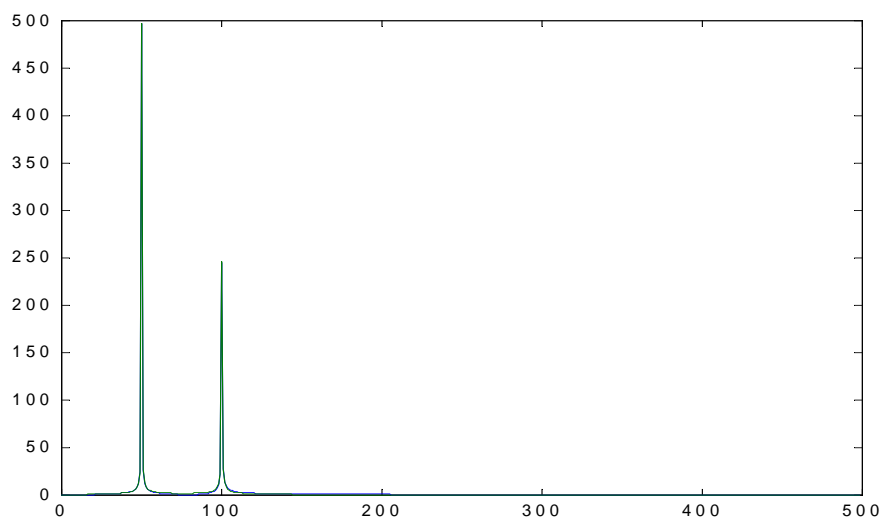
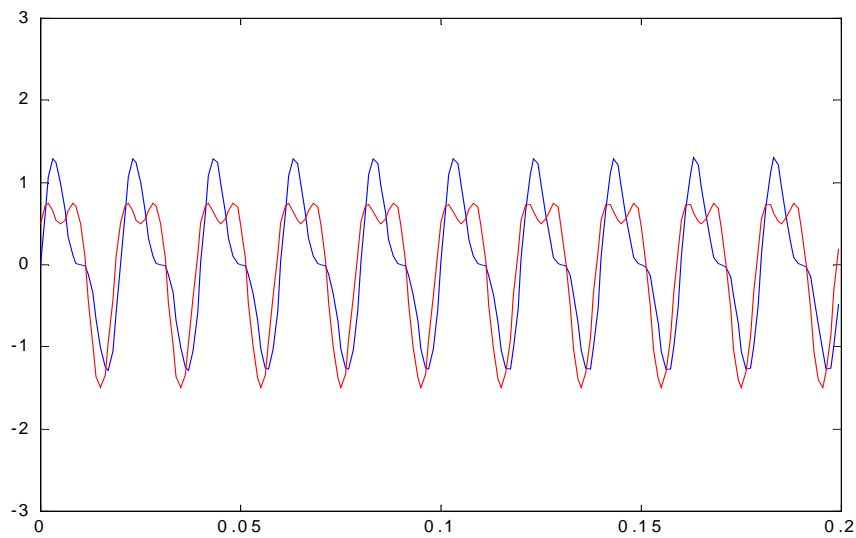
TRASFORMATA DI FOURIER

- Un cambiamento brusco nel tempo influenza l'intero spettro.



TRASFORMATA DI FOURIER

- Lo spettro delle ampiezze non fornisce nessuna idea di come evolvono nel tempo le varie componenti di frequenza.

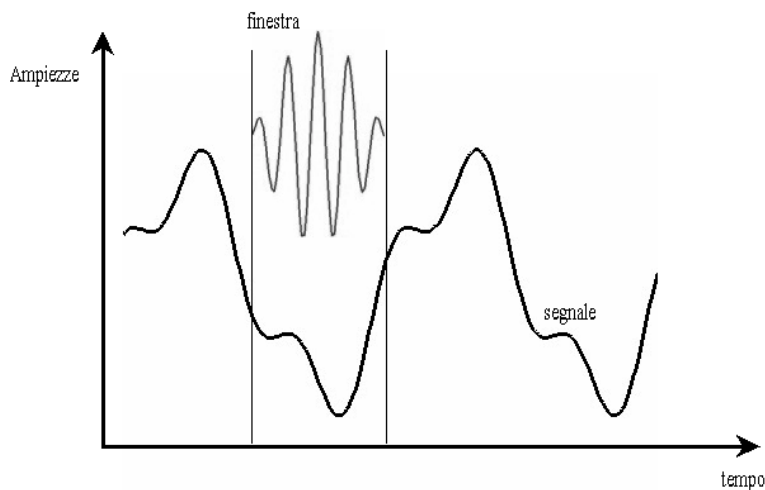


SHORT-TIME FOURIER ANALYSIS

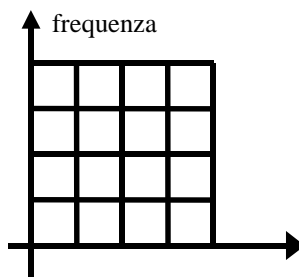
- Si applica una finestra temporale sul segnale e si prende la trasformata di Fourier.

$$\text{STFT}_f(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g^*(u-t) e^{-j\omega u} du$$

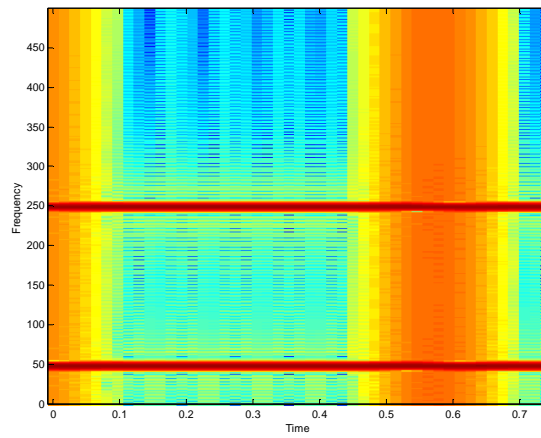
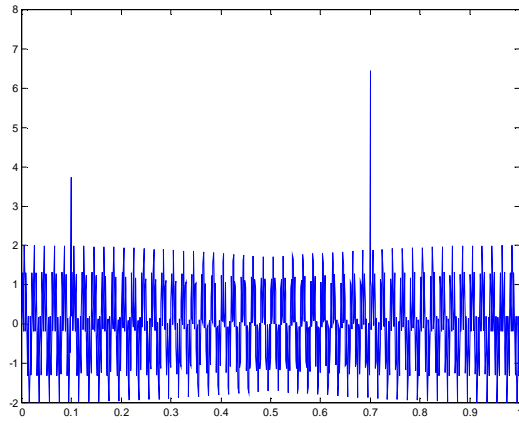
- E' una trasformata con una base di funzioni esponenziali complesse finestrate.



- Tassellazione del piano tempo-frequenza :



STFT : Esempio

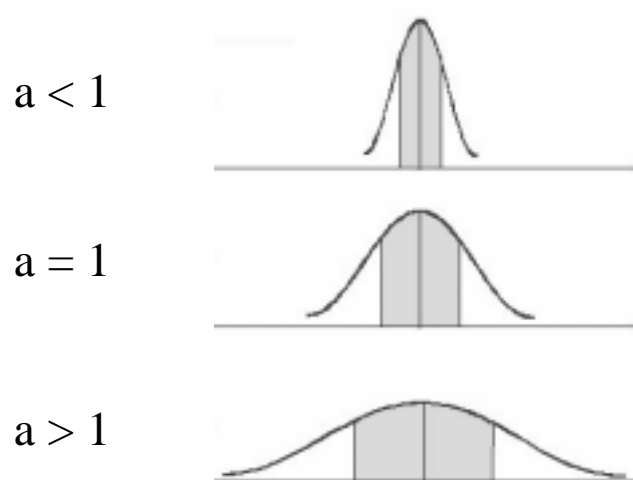


WAVELETS

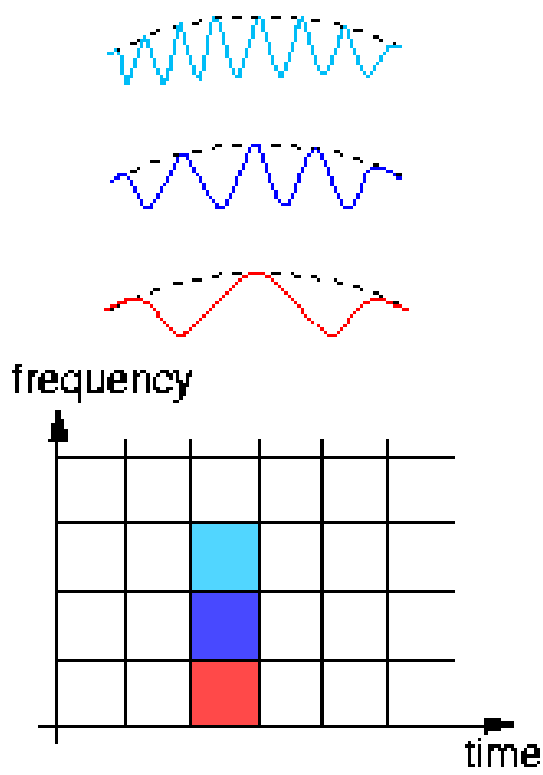
- La trasformata di Fourier con finestra (STFT) ha le finestre tempo-frequenza prefissate.
- Una finestra breve è abile a rivelare componenti di frequenza alte, ma dà una risposta insoddisfacente per le componenti di bassa frequenza.
- Soluzione : usare una funzione modulante che non abbia una larghezza fissa e abbia una buona localizzazione temporale.
- Le **Wavelets** sono le versioni dilatate e traslate di una funzione wavelet madre $\psi(t)$:

$$\psi_{a,b}(t) = a^{-1/2} \psi[(t-b)/a]$$

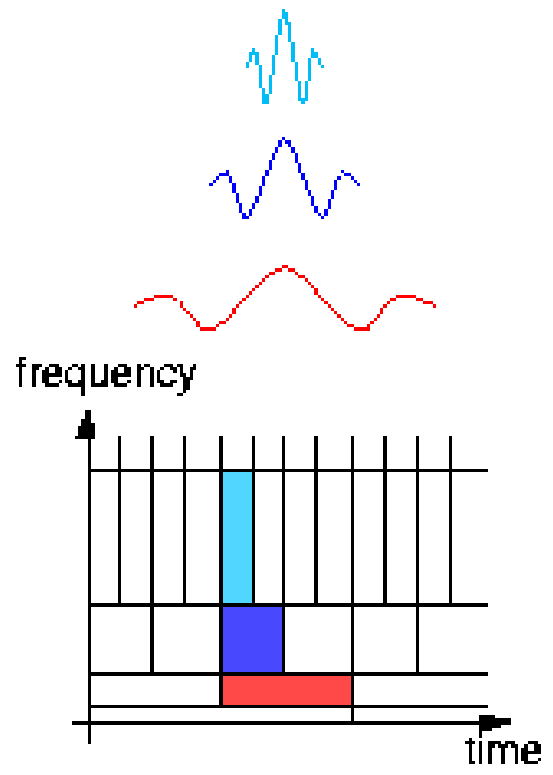
•



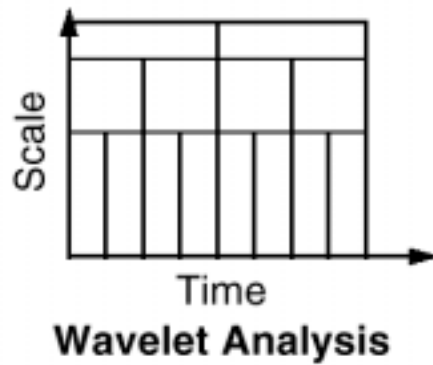
WAVELETS : Tassellazione del piano



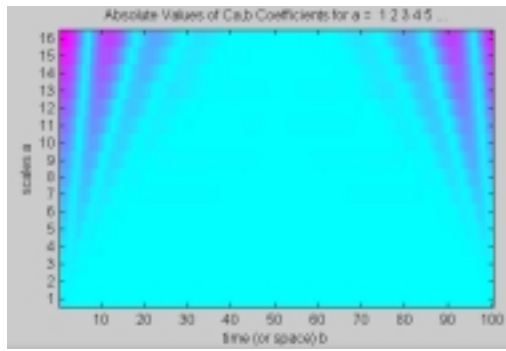
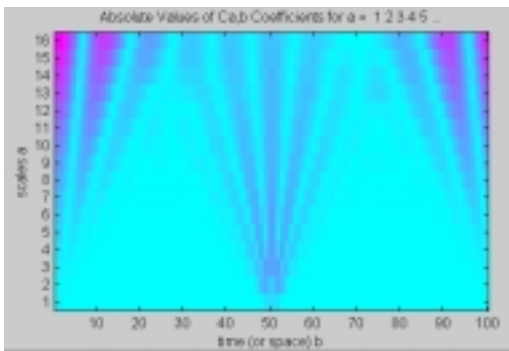
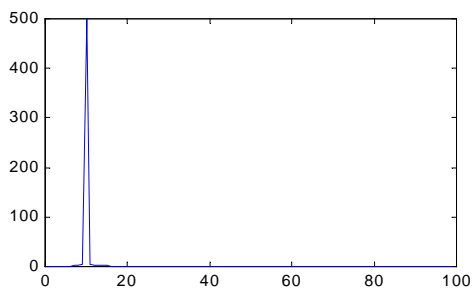
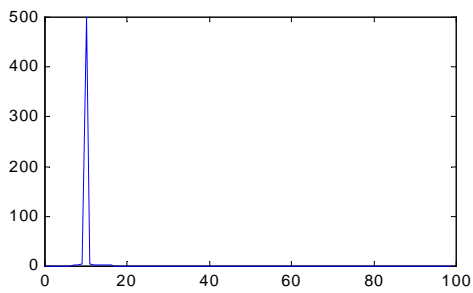
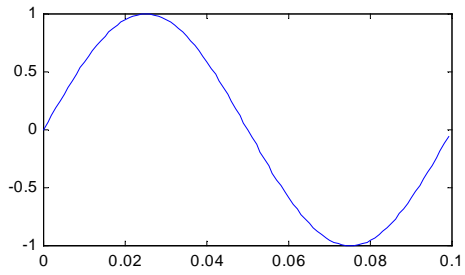
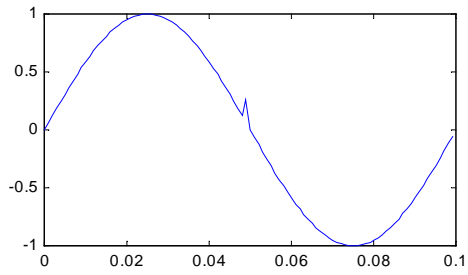
STFT



WAVELET TRANSFORM



WAVELETS: Esempio



WAVELETS : Alcune considerazioni

$$F(\omega) = \int f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Fourier

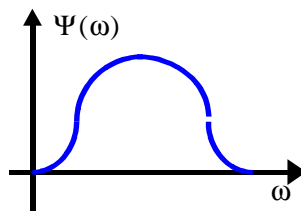
$$W(a,b) = \int f(t) \psi^*(a,b,t) dt$$

Wavelets

- Affinchè si possa ricostruire il segnale della trasformata Wavelets, occorre che sia verificata una certa *condizione di ammissibilità*, dalla quale segue che :

--- $\psi(t)$ è una funzione oscillante con media zero,

--- $\Psi(\omega) \rightarrow 0$ quando $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow \infty$
(filtro passa banda)



DWT (Discrete Wavelets Transform)

- La trasformata Wavelets è ridondante

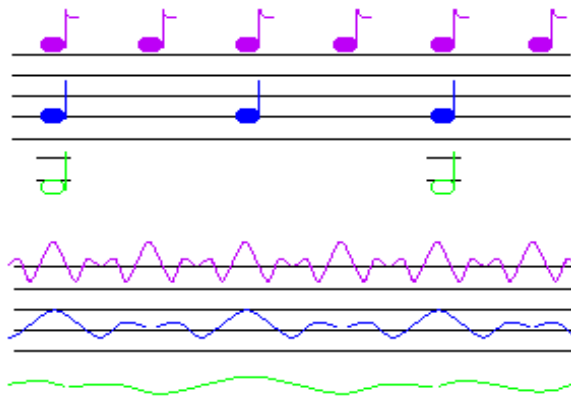
$$\begin{array}{ccc} f(t) & \leftrightarrow & W(a,b) \\ 1 \text{ variabile} & & 2 \text{ variabili} \end{array}$$

- DWT : i parametri a,b sono campionati su una griglia rettangolare:

$$\begin{aligned} a &= 2^j \\ b &= k \cdot 2^j \end{aligned}$$

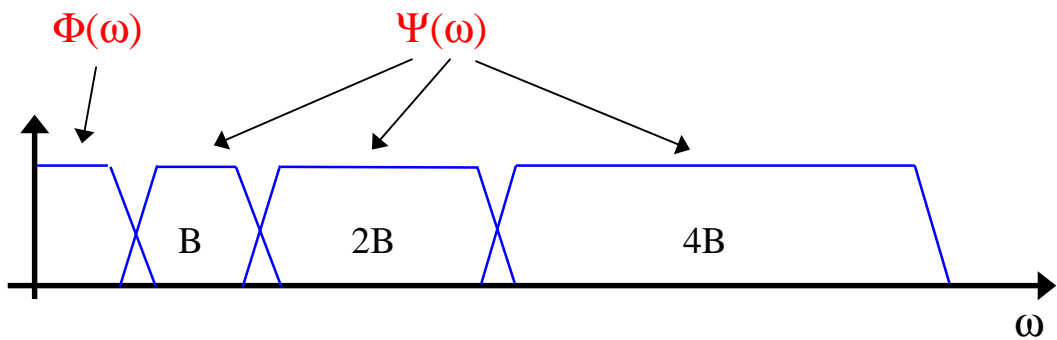
$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j} t - k)$$

-

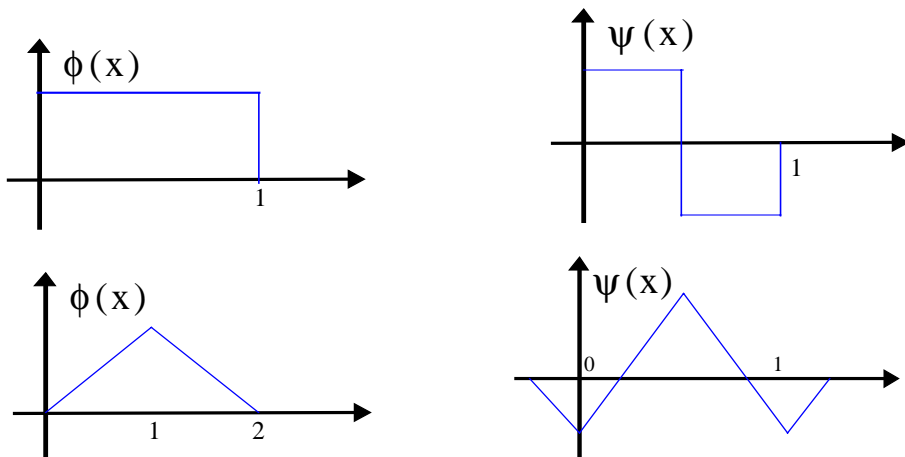


WAVELETS : Funzione padre

- $$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$
- $$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_{0,k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$
- La funzione $\phi(t)$ è detta funzione padre o funzione di scala.
- Analisi spettrale :

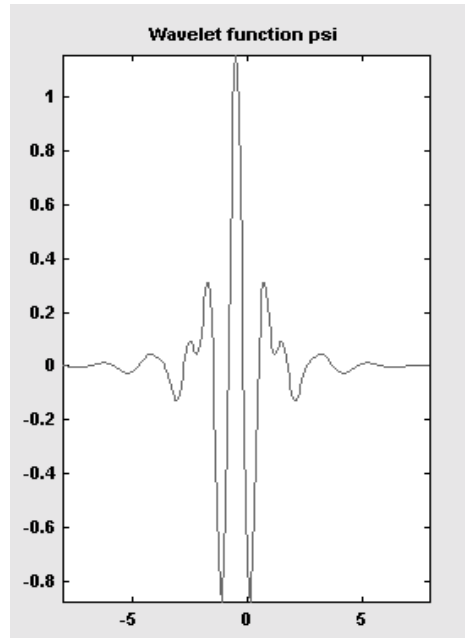
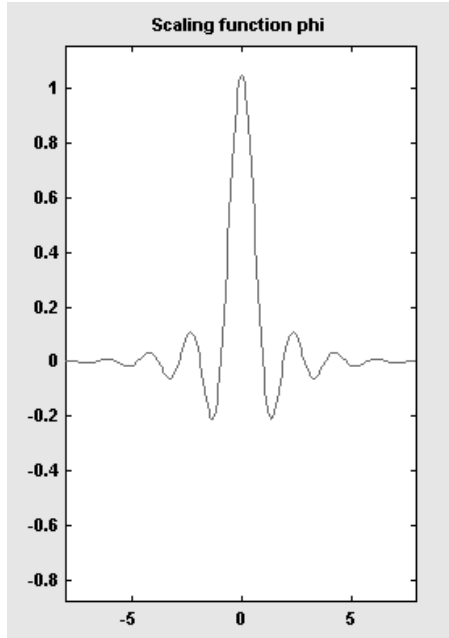


- Esempi :

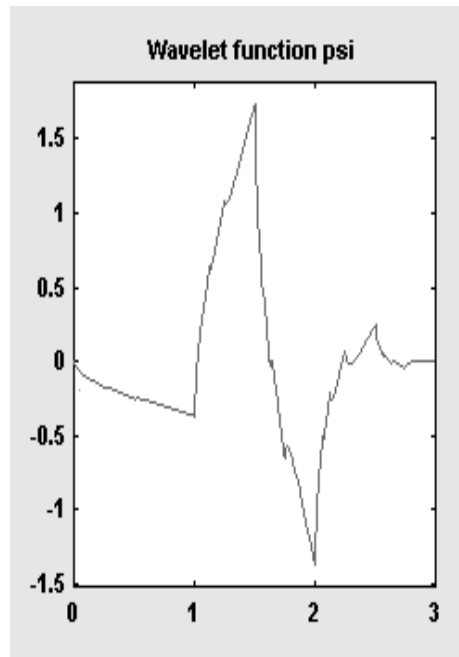
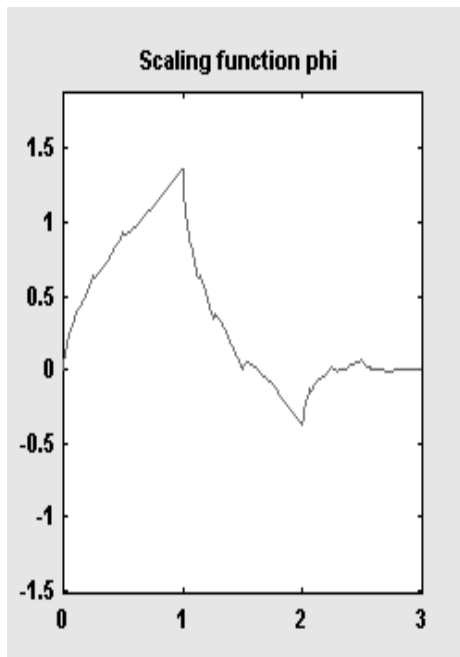


WAVELETS: Esempi

Meyer

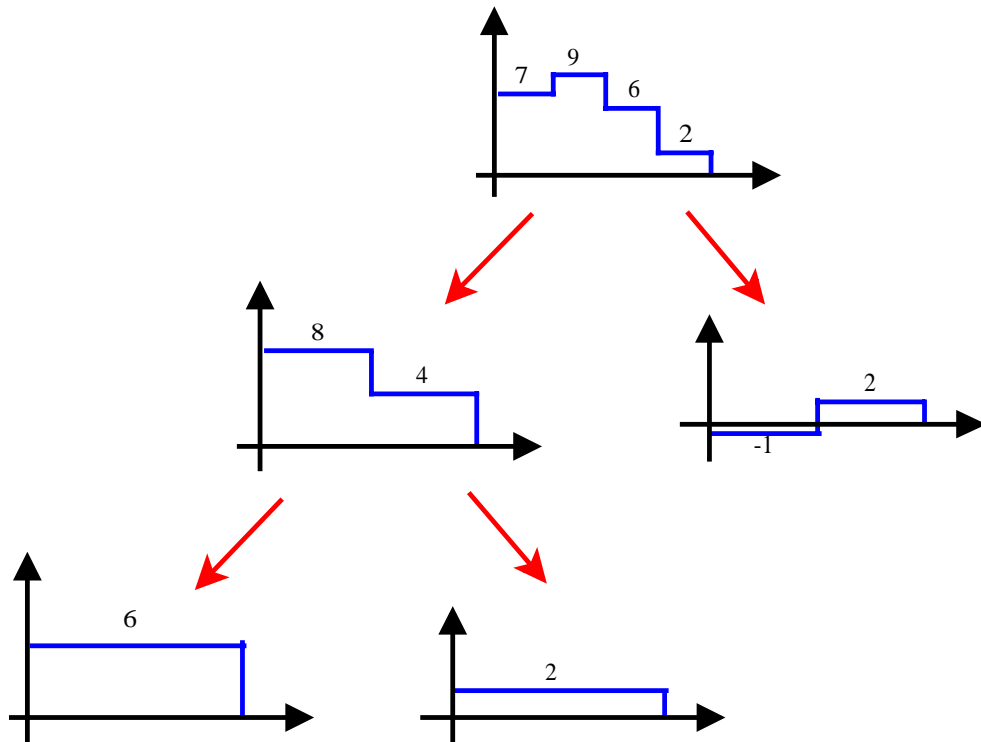


Daubechies

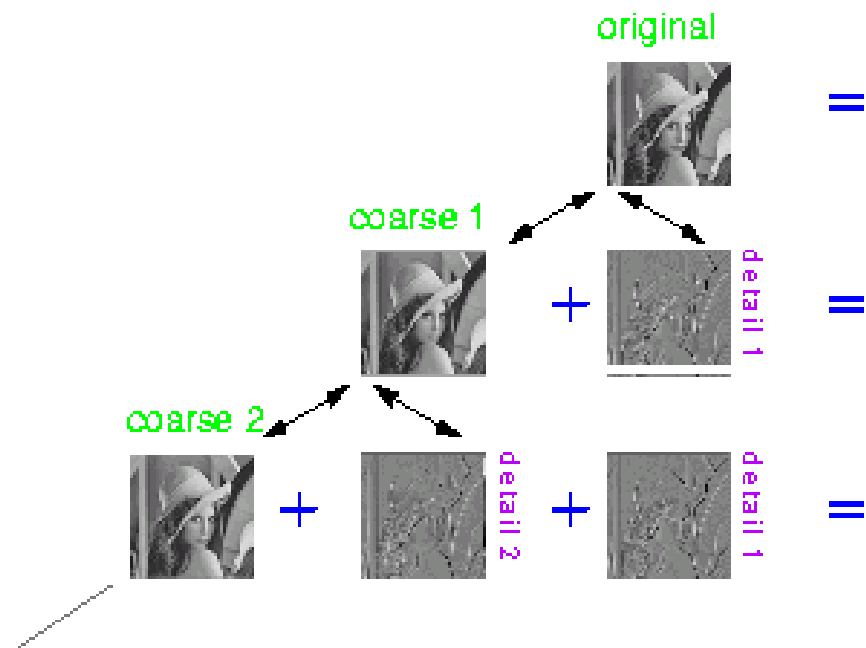


WAVELETS : Multirisoluzione

- 1D



- 2D



BASE DI WAVELETS : Proprietà

ORTOGONALITA'

Ogni funzione può essere espressa in un modo soltanto come combinazione delle funzioni della base. Le funzioni di una base ortogonale sono linearmente indipendenti.

Esempio : Vettori



SUPPORTO COMPATTO

Il supporto di ψ e ϕ è un intervallo di tempo finito. Ciò assicura una buona localizzazione temporale.

REGOLARITA'

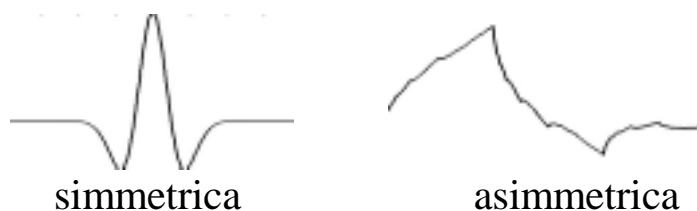
È una proprietà legata alla differenziabilità delle wavelets. Ad una regolarità più alta corrisponde anche una maggiore localizzazione in frequenza.



MOMENTI NULLI

Un alto numero di momenti ($\int t^j \psi(t) dt$) nulli implica che i coefficienti wavelets decadano a zero per alti valori del parametro di scala; si ha pertanto un minor numero di coefficienti.

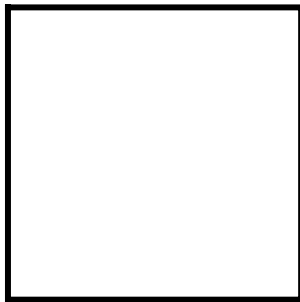
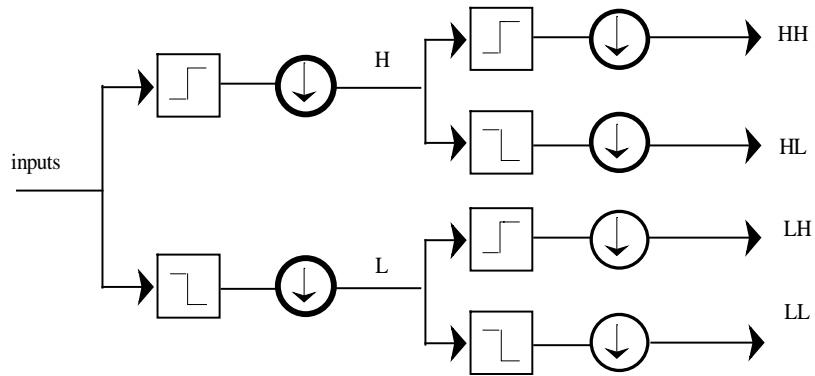
SIMMETRIA



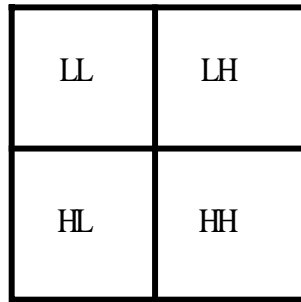
UNA BASE DI WAVELETS PER OGNI APPLICAZIONE

- Le wavelets simmetriche sono più desiderabili nell'analisi delle immagini.
- Le wavelets più regolari sono usate con algoritmi che coinvolgono operazioni di derivata.
- Una base di wavelets con un alto numero di momenti nulli conduce ad una compressione dei segnali o delle immagini più alta.
- Simmetria e ortogonalità sono incompatibili, eccetto che per le wavelets di Haar.
- E' possibile progettare wavelets con più o meno asimmetria.
- L'ortogonalità è sostituita dalla biortogonalità, che è meno restrittiva ed è compatibile con la simmetria.

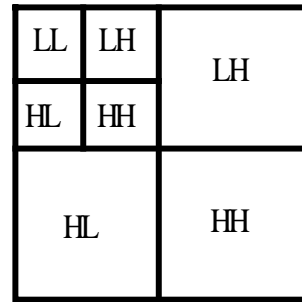
TRASFORMATA WAVELETS IN 2D



originale

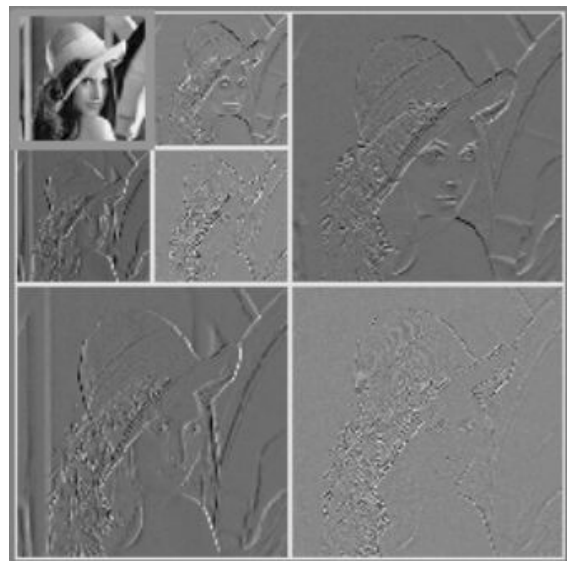


decomposizione
livello 1



decomposizione
livello 2

Esempio:

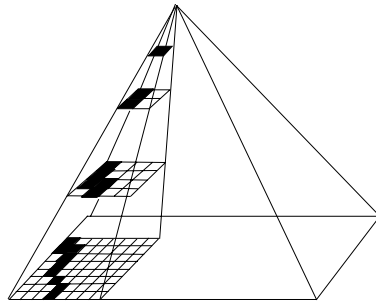


APPLICAZIONI

- **FILTRAGGIO DEL RUMORE**

Si sopprimono i coefficienti di dettaglio sotto una certa soglia nella decomposizione wavelets.

- **ANALISI IN MULTIRISOLUZIONE**



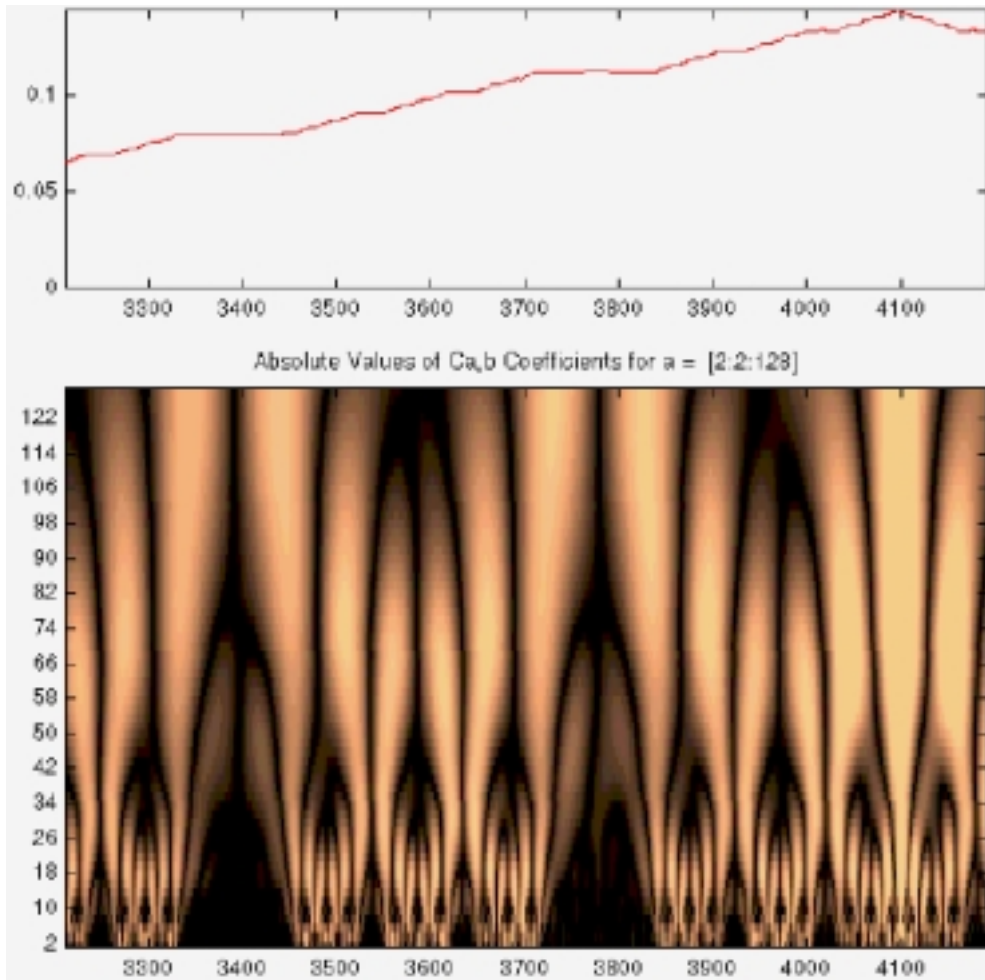
- **RIVELAZIONE AUTO-SIMILARITA' (FRATTALI)**

- **COMPRESSIONE DATI**

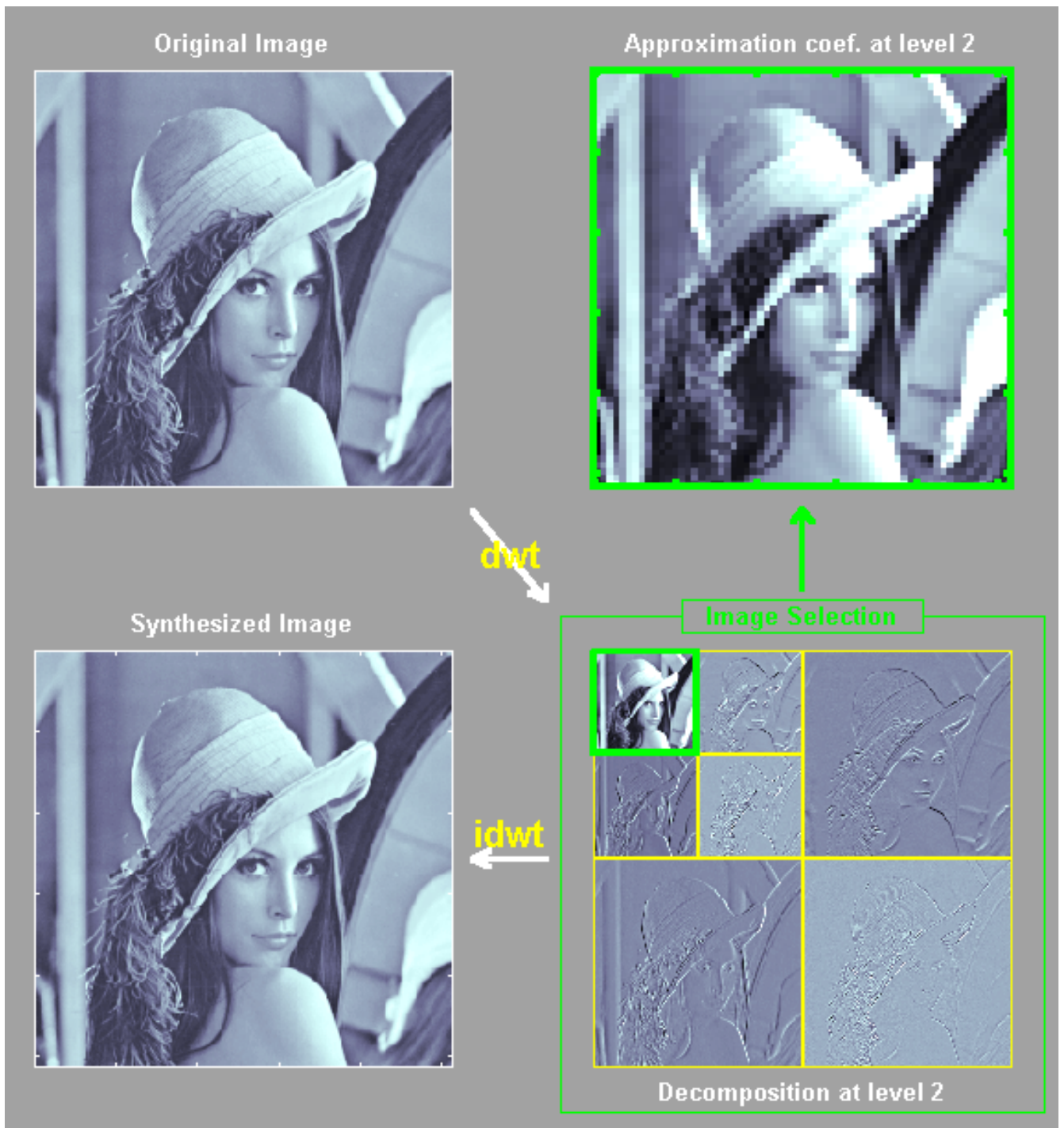
I valori più significativi dei coefficienti nella decomposizione wavelets sono concentrati verso le basse frequenze (sono più significativi i valori dei coefficienti delle approssimazioni che quelli dei dettagli).

- compressione senza perdite
- compressione con perdite

WAVELETS: AUTOSIMILARITA'

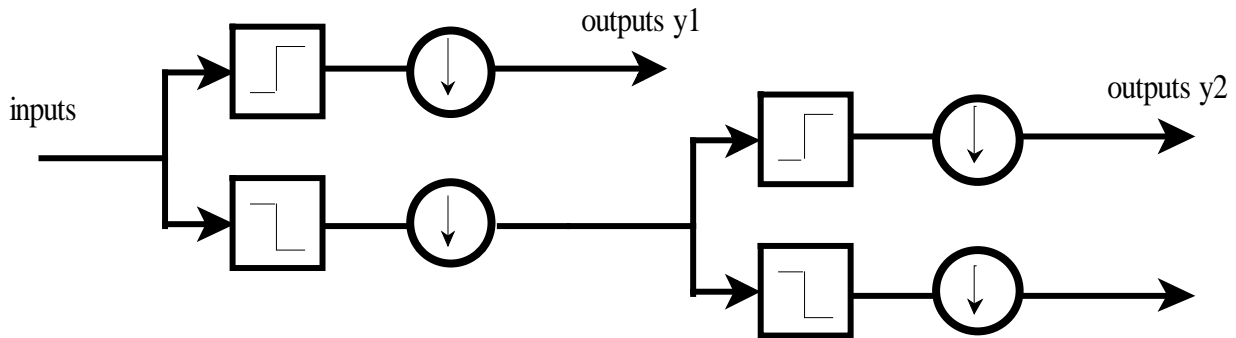


WAVELETS: COMPRESSION



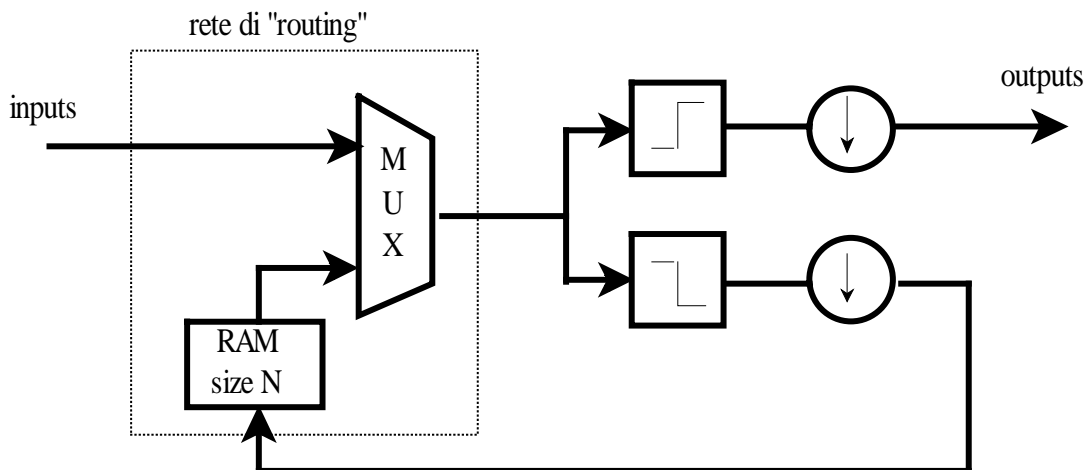
HARDWARE - 1D

- Algoritmo a piramide.



Il carico computazionale non è distribuito in modo uniforme : il processore di livello j è attivo $1/2^{j-1}$ del tempo del processore al primo livello.

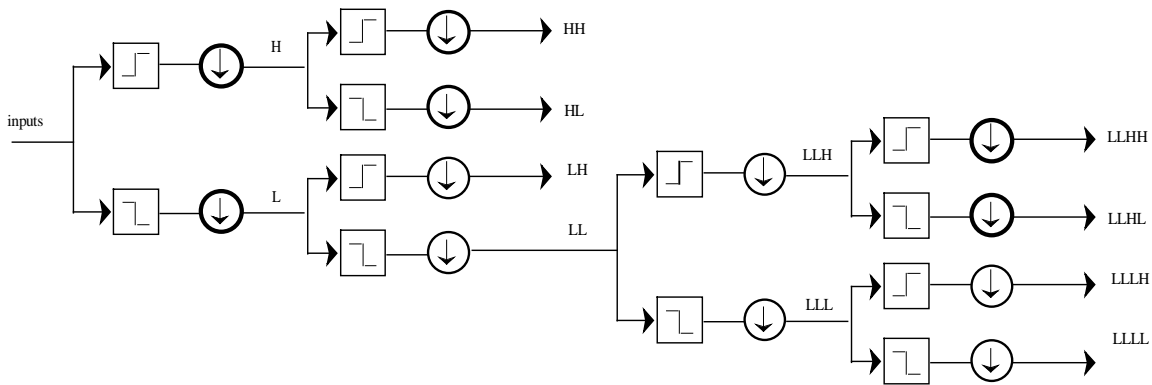
- Algoritmo ricorsivo.



I filtri possono essere di tipo seriale o parallelo.

HARDWARE - 2D

- Algoritmo a piramide.



Livello 1 : N^2 uscite

Livello 2 : $N^2/4$ uscite

- Algoritmo ricorsivo.
 - Richiede una memoria di N^2 parole.
 - Latenza alta.



Ultralow Cost Video Codec

ADV601LC

FEATURES

- 100% Bitstream Compatible with the ADV601
- Precise Compressed Bit Rate Control
- Field Independent Compression
- 8-Bit Video Interface Supports CCIR-656 and Multiplexed Philips Formats
- General Purpose 16- or 32-Bit Host Interface with 512 Deep 32-Bit FIFO

PERFORMANCE

- Real-Time Compression or Decompression of CCIR-601 to Video:
 - 720 x 288 @ 50 Fields/Sec — PAL
 - 720 x 243 @ 60 Fields/Sec — NTSC
- Compression Ratios from Visually Loss-Less to 350:1
- Visually Loss-Less Compression At 4:1 on Natural Images (Typical)

APPLICATIONS

- PC Video Editing
- Remote CCTV Surveillance
- Digital Camcorders
- Digital Video Tape
- Wireless Video Systems
- TV Instant Replay

GENERAL DESCRIPTION

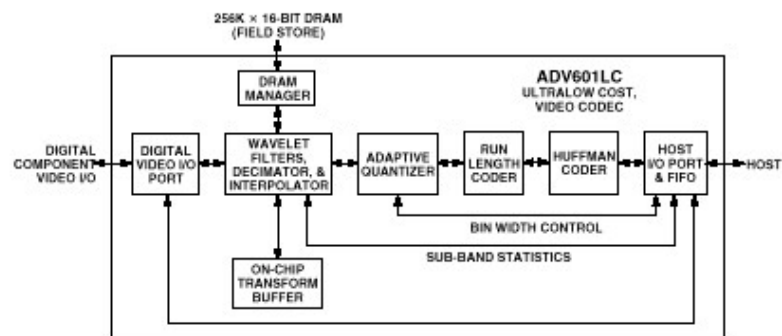
The ADV601LC is an ultralow cost, single chip, dedicated function, all digital CMOS VLSI device capable of supporting visually loss-less to 350:1 real-time compression and decompression of CCIR-601 digital video at very high image quality levels. The chip integrates glueless video and host interfaces with on-chip SRAM to permit low part count, system level implementations suitable for a broad range of applications. The ADV601LC is 100% bitstream compatible with the ADV601.

The ADV601LC is a video encoder/decoder optimized for real-time compression and decompression of interlaced digital video. All features of the ADV601LC are designed to yield high performance at a breakthrough systems-level cost. Additionally, the unique sub-band coding architecture of the ADV601LC offers you many application-specific advantages. A review of the General Theory of Operation and Applying the ADV601LC sections will help you get the most use out of the ADV601LC in any given application.

The ADV601LC accepts component digital video through the Video Interface and outputs a compressed bit stream through the Host Interface in Encode Mode. While in Decode Mode, the ADV601LC accepts a compressed bit stream through the Host Interface and outputs component digital video through the Video Interface. The host accesses all of the ADV601LC's control and status registers using the Host Interface. Figure 1 summarizes the basic function of the part.

(continued on page 2)

FUNCTIONAL BLOCK DIAGRAM



REV. 0

Information furnished by Analog Devices is believed to be accurate and reliable. However, no responsibility is assumed by Analog Devices for its use, nor for any infringements of patents or other rights of third parties which may result from its use. No license is granted by implication or otherwise under any patent or patent rights of Analog Devices.

One Technology Way, P.O. Box 9106, Norwood, MA 02062-9106, U.S.A.
Tel: 781/329-4700 World Wide Web Site: <http://www.analog.com>
Fax: 781/326-8703 © Analog Devices, Inc., 1999

CONCLUSIONI

- WAVELETS: un microscopio matematico
- Efficiente sintesi di teorie e concetti sviluppatasi in campi diversi dell'ingegneria, della fisica e della matematica.
- Quale base di wavelets ?
- Nei sistemi di trigger degli apparati di fisica sperimentale
 - multirisoluzione (nell'elaborazione dei dati)
 - compressione (nella trasmissione dei dati)

